Okruhy z učiva středoškolské matematiky pro přípravu ke studiu na Fakultě bezpečnostního inženýrství VŠB – TU Ostrava

I Úpravy algebraických výrazů, zlomky, rozklad kvadratického trojčlenu, mocniny se záporným exponentem, mocniny s racionálním exponentem, odmocniny, dělení mnohočlenu mnohočlenem.

II Funkce, jejich definiční obory, vlastnosti a grafy: lineární, kvadratické, lineární lomené, goniometrické, exponenciální a logaritmické.

III Rovnice a nerovnice o jedné neznámé – lineární, kvadratické, s absolutní hodnotou, s parametrem, iracionální, soustavy rovnic a nerovnic.

IV Logaritmy, logaritmické a exponenciální rovnice.

V Goniometrické výrazy, rovnice a jednoduché nerovnice.

VI Analytická geometrie lineárních útvarů: vektory – souřadnice, základní operace, skalární součin; přímka v rovině – parametrické rovnice, obecná rovnice, směrnicový a úsekový tvar rovnice přímky, odchylka dvou přímek; rovina v prostoru – parametrické rovnice, obecná rovnice a její úsekový tvar.

I Úprava algebraických výrazů

1. Vypočtěte:

a) $\left(\dfrac{x^2y^{-3}}{z\cdot t^{-3}}\right)^{-2}$ $\left[\dfrac{y^6z^2}{x^4t^6}\right]$

b) $\left(\dfrac{3ab}{25x^2y^2}\right)^{-3}:\left(\dfrac{4a}{5xy^2}\right)^{-3}$ $\left[\left(\dfrac{20x}{3b}\right)^3\right]$

c) $\sqrt{2ab}\cdot\sqrt[3]{4a^2b^4}\cdot\sqrt[4]{8a^3b^5}\cdot\sqrt[6]{2a^5b^4}\cdot\sqrt[12]{4a^2b^8}$ $\left[4a^2b^4\cdot\sqrt[12]{8a^{11}b^5}\right]$

2. Určete nejmenší společný násobek mnohočlenů:

a) $5a^2-5b^2, 3a^3-3ab^2, 6ab^2-6b^3$ $\left[30ab^2(a^2-b^2)\right]$

b) $(c-a)(c-b), (b-c)(b-a), (a-b)(a-c)$ $[(a-c)(b-c)(a-b)]$

3. Proveďte dělení:

a) $(6x^4-2x^3-4x^2+1):(2x^2-3x+1)$ $\left[3x^2+\dfrac{7}{2}x+\dfrac{7}{4}+\dfrac{7x-3}{4(2x^2-3x+1)}\right]$

b) $(x^5-3x^3+2x^2-3):(5x^2-1)$ $\left[\dfrac{1}{5}x^3-\dfrac{14}{25}x+\dfrac{2}{5}-\dfrac{14x+65}{25(5x^2-1)}\right]$

c) $(3x^6-5x^4+2x^3-1):(x^3+2x+1)$ $\left[3x^3-11x-1+\dfrac{x(22x+13)}{x^3+2x+1}\right]$

4. Upravte a stanovte podmínky:

a) $\dfrac{\dfrac{1-x}{1-x+x^2}+\dfrac{1+x}{1+x+x^2}}{\dfrac{1+x}{1+x+x^2}-\dfrac{1-x}{1-x+x^2}}$ $\left[\dfrac{1}{x^3}, x\neq 0\right]$

b) $\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\cdot\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}+4\sqrt{x}-\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right)$ $[4x, x>0, x\neq 1]$

c) $\dfrac{\sqrt[6]{x^5}\cdot\sqrt[4]{x3}\cdot x^{1/3}\cdot x^{-1}}{x^{-1/2}\cdot\sqrt[12]{x^5}}$ $\qquad [x, x>0]$

d) $\dfrac{(a-b)^2+ab}{(a+b)^2-ab} : \dfrac{a^5+b^5+a^2b^3+a^3b^2}{(a^3+b^3+a^2b+ab^2)\cdot(a^3-b^3)}$ $\qquad [a-b, a\neq\pm b]$

e) $\left(\dfrac{t\sqrt{t+2}}{\sqrt{t-2}}-\dfrac{2\sqrt{t-2}}{\sqrt{t+2}}+\dfrac{4t}{\sqrt{t^2-4}}\right)^{-1/2}\cdot\sqrt[4]{t^2-4}$ $\qquad \left[\dfrac{\sqrt{t^2-4}}{t+2}, t>2\right]$

5. Upravte algebraické výrazy:

a) $2n-\left(\dfrac{2n-3}{n+1}-\dfrac{n+1}{2-2n}-\dfrac{n^2+3}{2n^2-2}\right)\cdot\dfrac{n^3+1}{n^2-n}$ $\qquad \left[\dfrac{2(n-1)}{n}, n\neq\pm1, n\neq0\right]$

b) $\left[\left(\dfrac{a+2}{a-2}\right)^3 : \dfrac{a^3+4a^2+4a}{3a^2-12a+12}\right]\cdot\dfrac{a}{3}$ $\qquad \left[\dfrac{a+2}{a-2}, a\neq\pm2, a\neq0\right]$

c) $\left[b^2-\dfrac{a}{1+\left(\dfrac{b-a}{a}\right)^{-1}}\cdot\left(\dfrac{a\cdot b}{b-a}-a\right)\right]\div\dfrac{a^2+ab+b^2}{b}$ $\qquad [b-a, a\neq0, b\neq0, a\neq b]$

d) $\left(\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\div(a-b)\div\dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ $\qquad [1, a\neq b, a\geq0, b\geq0]$

e) $\left(\sqrt{a}+\dfrac{b-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)\div\left(\dfrac{a}{\sqrt{ab}+b}+\dfrac{b}{\sqrt{ab}}-\dfrac{a+b}{\sqrt{ab}}\right)$ $\qquad \left[-\dfrac{a+b}{\sqrt{a}}, a\rhd0, b\rhd0\right]$

f) $\left[\left(\dfrac{x^2+y^2}{2y}-x\right)\div\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}\right)\right]\div\dfrac{x^3-xy^2}{4}$ $\qquad \left[\dfrac{2}{x+y}, x\neq0, y\neq0, x\neq\pm y\right]$

g) $\dfrac{a^2+a-2}{a^4-3a^3}\cdot\left[\dfrac{(a+2)^2-a^2}{4a^2-4}-\dfrac{3}{a^2-a}\right]$ $\qquad \left[\dfrac{a+2}{a^4}, a\neq3, a\neq0, a\neq\pm1\right]$

h) $\dfrac{a\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2b\sqrt{a}}\right)^{-1}+b\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2a\sqrt{b}}\right)^{-1}}{\left(\dfrac{a+\sqrt{ab}}{2ab}\right)^{-1}+\left(\dfrac{b+\sqrt{ab}}{2ab}\right)^{-1}}$ $\left[\sqrt{ab}, a \rhd 0, b \rhd 0\right]$

i) $\dfrac{a\sqrt{a}}{\sqrt[5]{a^4\sqrt[3]{a^2}}} \div \dfrac{a^{1/2}\cdot a^{-1}}{\sqrt[3]{a}}$ $\left[a\sqrt[5]{a^2}, a \rhd 0\right]$

6. Zjednodušte a udejte podmínky existence výrazů:

a) $\left(\dfrac{a^3-ab^2+b^3}{(a-b)^3}-\dfrac{b}{a-b}\right)\cdot\left(\dfrac{a^2-2ab+2b^2}{a^2-ab+b^2}-\dfrac{b}{a}\right)$ $\left[1, a \neq 0, a \neq b\right]$

b) $\left[\left(\dfrac{3}{a-b}-\dfrac{3a}{b^3-a^3}\cdot\dfrac{a^2+ab+b^2}{a+b}\right)\div\dfrac{2a+b}{a^2+2ab+b^2}\right]\cdot\dfrac{2}{a+b}$ $\left[\dfrac{6}{a-b}, a \neq \pm b, a \neq -\dfrac{b}{2}\right]$

c) $\dfrac{m-n}{m^{1/2}-n^{1/2}}-\dfrac{m^{3/2}-n^{3/2}}{m-n}$ $\left[\dfrac{\sqrt{mn}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}, m \geq 0, n \geq 0, m \neq n\right]$

d) $\left(\dfrac{a^{-2/3}}{b^{-1}}-\dfrac{b^{-1}}{a^{-2/3}}\right)\div\left(\dfrac{a^{-1/3}}{b^{-1/2}}-\dfrac{b^{-1/2}}{a^{-1/3}}\right)$ $\left[\dfrac{\sqrt[3]{a^2}+b}{\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt{b}}, a \neq 0, b \rhd 0, b \neq \sqrt[3]{a^2}\right]$

e) $\left(\dfrac{3x^{-1/3}}{x^{2/3}-2x^{-1/3}}-\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{1}{3}}}\right)^{-1}-\left(\dfrac{1-2x}{3x-2}\right)^{-1}$ $\left[x^2/(2x-1), x \neq \dfrac{2}{3}, x \neq 2, x \neq 1, x \neq 0.5\right]$

7. Rozložte na součiny, resp. Upravte krácením:

a) $x^2-2ax+a^2-b^2$ $\left[(x-a-b)\cdot(x-a+b)\right]$

b) $abx^2-2a\sqrt{ab}x+a^2-b^2$ $\left[\left(x\sqrt{ab}-a-b\right)\cdot\left(x\sqrt{ab}-a+b\right), ab \geq 0\right]$

c) $\dfrac{x^2-7x+10}{2x^2-13x+15}$ $\left[\dfrac{x-2}{2x-3}, x \neq 5, x \neq \dfrac{3}{2}\right]$

d) $\dfrac{3x^2-11x+6}{3x^2-17x+10}$ $\left[\dfrac{x-3}{x-5}, x \neq \dfrac{2}{3}, x \neq 5\right]$

e) $\dfrac{2x^3-5x^2-2x+5}{x^2-4x+3}$ $\left[\dfrac{(2x-5)(x+1)}{x-3}, x\neq 3, x\neq 1\right]$

II Funkce

1. Do téže soustavy souřadnic načrtněte grafy funkcí a vyznačte důležité body (průsečíky s osami x a y, vrcholy apod.)

a) $y=x^2$ $y=x^2-5$ $y=(x-5)^2$ $y=(x+5)^2$

b) $y=x^3$ $y=-x^3$ $y=x^{-3}$

c) $y=\sqrt{x}$ $y=-\sqrt{x}$ $y=\sqrt{-x}$

d) $y=\sqrt[3]{x}$ $y=\sqrt[3]{x-1}$ $y=\sqrt[3]{1-x}$

e) $y=2^x$ $y=2^{-x}$ $y=3-2^x$

f) $y=3^x$ $y=\log_3 x$

g) $y=\log x$ $y=1-\log x$ $y=\log(1-x)$

h) $y=\log_2 x$ $y=\log_{1/2} x$ $y=\log_2|x|$

i) $y=\sin x$ $y=|\sin x|$ $y=2+\sin\dfrac{x}{2}$ pro $x\in\langle -\pi,\pi\rangle$

j) $y=\mathrm{tg}x$ $y=|\mathrm{tg}x|$ $y=\mathrm{tg}2x$ pro $x\in\langle -\pi,\pi\rangle$

k) $y=\mathrm{cotg}x$ $y=\mathrm{cotg}2x$ $y=\mathrm{cotg}\dfrac{x}{2}$ pro $x\in\langle 0,2\pi\rangle$

l) $y=\cos x$ $y=2\cos x$ $y=\cos 2x$ $y=\cos\dfrac{x}{2}$ pro $x\in\langle 0,4\pi\rangle$

2. Určete definiční obor funkce:

a) $y=\dfrac{x-1}{x+2}$ $[(-\infty,2)\cup(-2,\infty)]$

b) $y=\sqrt{9-x^2}$ $[\langle -3,3\rangle]$

c) $y = \left(x^2 + 3x\right)^{-1/2}$ $\left[(-\infty,-3) \cup (0,\infty)\right]$

d) $y = \dfrac{2\cos x}{2 + \sin x}$ $\left[(-\infty,\infty)\right]$

e) $y = 2\log(x-1)$ $\left[(1,\infty)\right]$

f) $y = \log(x-1)^2$ $\left[(-\infty,1) \cup (1,\infty)\right]$

3. Určete definiční obor funkce:

a) $y = \log\dfrac{2-x}{2+x}$ $\left[(-2,2)\right]$

b) $y = \ln e^{1/\ln x}$ $\left[(0,1) \cup (1,\infty)\right]$

c) $y = \ln x^3$ $\left[(0,\infty)\right]$

d) $y = \ln\ln x$ $\left[(1,\infty)\right]$

e) $y = \ln\ln\sin x$ $\left[0\right]$

III Rovnice a nerovnice

1. Řešte rovnice:

a) $\dfrac{x^2 - 2x - 8}{4 - x} = 1$ $\left[-3\right]$

b) $\dfrac{y+4}{y-4} + \dfrac{7y-8}{8-2y-y^2} = \dfrac{y-2}{y+4}$ [nemá řešení]

c) $\dfrac{a}{a+x} + \dfrac{a-x}{x} = \dfrac{11}{10}$, a je parametr $\left[-\dfrac{5a}{7}, \dfrac{2a}{3}\right]$

d) $1 - \dfrac{2b}{x-a} = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2 - 2ax - x^2}$, a, b jsou parametry $\left[b, 2a + b\right]$

2. Pro která x, resp. y je splněna nerovnice:

a) $(y-3)^2 - (y+6)^2 > 3 - 8y$ $\left[(-\infty,-3)\right]$

b) $\dfrac{x^2+5x+8}{x^2-5x-6} \geq 0$ $\quad [(-\infty,-1)\cup(6,\infty)]$

3. Řešte nerovnice:

a) $\dfrac{3-2x}{2x-5} \geq 0$ $\quad [2]$

b) $\dfrac{x-5}{x+3} < 3$ $\quad [(-\infty,-7)\cup(-3,\infty)]$

4. Řešte nerovnice:

a) $\dfrac{1}{x+1} < \dfrac{1}{3x-2}$ $\quad \left[(-\infty,-1)\cup\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{2}\right)\right]$

b) $\dfrac{2x-1}{x-1} \geq \dfrac{x+2}{x+1}$ $\quad [(-\infty,-1)\cup(1,\infty)]$

c) $\dfrac{y}{y-2} - \dfrac{3}{y+1} \leq 1$ $\quad [(-1,2)\cup(8,\infty)]$

5. Pro která m má rovnice

a) $3(x+1) = 4 + mx$ kořen větší než -1 $\quad [(-\infty,3)\cup(4,\infty)]$

b) $x^2 + 2mx + m^2 = 4$ oba kořeny záporné $\quad [m > 2]$

6. Zjistěte, která x resp. y vyhovují nerovnici:

a) $|3y+9| > 4y+3$ v oboru přiroz. čísel $\quad [1,2,...,5]$

b) $-3x < \dfrac{x}{2} - \dfrac{|3+2x|}{4}$ $\quad \left[\left(\dfrac{1}{4},\infty\right)\right]$

c) $y-3 \leq |2y+1|$ $\quad$ [kazde ralne cislo]

d) $\dfrac{3}{|x+1|} > 1$ v oboru celých čísel $\quad [-3,-2,0,1]$

7. Vyřešte rovnice a nerovnice:

a) $|x-7|+4x=|2x-5|$ $\left[-\frac{2}{5}\right]$

b) $|y+3|-|y-2|=-5$ $[(-\infty,-3>]$

c) $|2y+1|-|3-y|<y$ $[(-2,1)]$

d) $3|x-1|+|3x-1|\le x-1$ [nemá řešení]

e) $|x^2-4|\ge x-4$ [kazde realne cislo]

f) $x^2+10>|16-3x^2|$ $\left[\left(-\sqrt{13},-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\cup\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\sqrt{13}\right)\right]$

8. Řešte v R, x je neznámá, a, m jsou parametry:

a) $\frac{x^2}{x^2-a^2}-\frac{x+a}{x-a}+\frac{a}{x+a}=0$ [pro a=0 je rovnice splněna pro jakékoliv $x\neq 0$, pro $a\neq 0$ má rovnice jedno řešení x=-2a]

b) $\frac{1-x}{1-m}-\frac{1+x}{1+m}+\frac{1-x}{1+2m+m^2}=0$ [pro m=-3 rovnice nemá řešení; pro $m\neq\pm1,-3$ existuje jediné řešení $x=\frac{1+m+2m^2}{3+m}$]

9. V RxR příp.RxRxR řešte soustavy rovnic jinou metodou než dosazovací:

a) $x-y+3=0,\ \frac{y}{x}=\frac{3}{2}$ $[(6,9)]$

b) $\frac{7}{x}-\frac{3}{y}=5,\ \frac{5}{x}-\frac{2}{y}=3$ $\left[\left(-1,-\frac{1}{4}\right)\right]$

c) $3x+2py=1,\ (3p-1)x-py=1$ $\left[\left(\frac{3}{1+6p},\frac{3p-4}{p(1+6p)}\right),\text{pro } p\neq-\frac{1}{6}, p\neq 0\right]$

d) $\frac{x+1}{y+1}=2\frac{y+2}{z+1}=4,\ \frac{z+3}{x+1}=\frac{1}{2}$ $[(5,2,0)]$

e) $2x+3y=12,\ 3x+2z=11,\ 3y+4z=10$ $[(3,2,1)]$

10. Řešte soustavy rovnic:

a) $x+y^2=7,\ xy^2=12$ $[(3,2)(3,-2)(4,\sqrt{3})(4,-\sqrt{3})]$

b) $x^2-xy-y^2=7,\ x-y=1$ $[(-2,-3)(3,2)]$

c) $x^2+y^2=\frac{5}{2}xy,\ x-y=\frac{1}{2}xy$ $[(-1,-2)(2,1)]$

11. Která reálná čísla vyhovují rovnici:

a) $x+\sqrt{x^2-9}=21$ $\left[\frac{75}{7}\right]$

b) $\sqrt{\frac{(x+1)}{(x-1)}}-\sqrt{\frac{(x-1)}{(x+1)}}=\frac{3}{2}$ $\left[\frac{5}{3}\right]$

c) $\sqrt{4x^2-\sqrt{8x+5}}=2x+1$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

d) $3+\sqrt{x-1}=x$ $[5]$

e) $21+\sqrt{x^2-9}=x$ [nemá řešení]

f) $x-\sqrt{2-x}\le 1$ $\left[(-\infty,\frac{1+\sqrt{5}}{2}>\right]$

12. Která přirozená čísla vyhovují nerovnicím:

a) $\frac{2x}{5}+2<2(x-2)<x+3$ $[4,5,6]$

b) $-1\le 2-\sqrt{2-x}\le 1$ $[1]$

13. Graficky vyřešte soustavu nerovnic:

a) $3x+y-6\le 0,\ x-3y+6\ge 0$ Které dvojice přirozených čísel vyhovují? $[(1,1),(1,2)]$

b) $2x+3y<6,\ 4x+6y>7$

c) $y>x^2-4x+2,\ x-y\geq 2$ Které dvojice celých čísel vyhovují? $[(2,-1)(2,0)(3,0)(3,1)]$

14. Řešte rovnice:

a) $2x^3-5x^2-x+6=0$, je-li jeden z kořenů číslo $\frac{3}{2}$ $\left[-1,\frac{3}{2},2\right]$

b) $x^4-4x^3+3x^2+8x-10=0$, jestliže má kořen $(2+i)$ $\left[2+i,2-i,-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$

IV Logaritmy. Logaritmické a exponenciální rovnice

1. Stanovte z tak, aby

a) $\log_z 4=2$ $[2]$

b) $\log_z 100=2$ $[10]$

c) $\log_z 0{,}0001=2$ $\left[\frac{1}{100}\right]$

2. Určete:

a) $\log_2 4$ $[2]$

b) $\log_2 \frac{1}{8}$ $[-3]$

c) $\log_2 \sqrt[3]{4}$ $\left[\frac{2}{3}\right]$

d) $\log_2 2$ $[1]$

3. Co je větší

a) $\log_2 5$ nebo $\log_2 7$ $[\log_2 7]$

b) $\log_{1/2} 5$ nebo $\log_{1/2} 7$ $[\log_{1/2} 5]$

4. Zjednodušte výraz:

a) $\log a - 2\log b + \frac{3}{4}\log e - 3 - \frac{1}{2}\log(a-1)$ $\left[\log\frac{a\sqrt[4]{e^3}}{1000b^2\sqrt{a-1}}, a>1, b>0\right]$

b) $3\log a + \log b + 2 - \frac{1}{3}\log(c+3) + \frac{1}{4}\log(b-2)$ $\left[\log\frac{100a^3b\sqrt[4]{b-2}}{\sqrt[3]{c+3}}, a>0, b>2, c>-3\right]$

5. Určete výraz, jehož logaritmováním dostaneme:

a) $\frac{3}{2}(\log a - \log b) - \frac{\log c}{4} + \log(a-b)$ $\left[\frac{\sqrt{(a/b)^3}(a-b)}{\sqrt[4]{c}}, a>b, b>0, c>0\right]$

b) $\log(a-2) + \frac{\log c}{2} - \frac{1}{3}(\log c + 2\log b)$ $\left[\frac{(a-2)\sqrt{c}}{\sqrt[3]{cb^2}}, a>2, b>0, c>0\right]$

6. Určete všechna řešení rovnic v oboru reálných čísel:

a) $\log(x+2) - \log(x-1) = 2 - \log 4$ $\left[9/8\right]$

b) $\frac{\log 2x}{\log(4x-15)} = 2$ $[4.5]$

c) $3^{\log x} + 5^{\log y} = 14; 3^{2\log x} - 5^{2\log y} = 56$ $[100, 10]$

d) $2\log(x-2) - \log(14-x) = 0$ $[5]$

e) $\log_3(x-1) - 2\log_3(x-3) = 0$ $[5]$

f) $\frac{\log_2(x-1)}{\log_2(3-x)} = \log_2 4$ [nemá řešení]

7. Řešte rovnice:

a) $3^3 \cdot 27^{2x-3} = 81^{3x-5}$ $\left[\frac{7}{3}\right]$

b) $3\cdot 4^{x}+\frac{1}{3}\cdot 9^{x+2}=6\cdot 4^{x+1}-\frac{1}{2}\cdot 9^{x+1}$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

c) $3^{x}+3^{x+1}+3^{x+2}=5^{x}+5^{x+1}+5^{x+2}$ $[-1{,}7\ldots]$

d) $8^{2x+1}=32\cdot 2^{4y-1}, 5\cdot 5^{x-y}=\sqrt{25^{2y+1}}$ $\left[\frac{3}{14},\frac{1}{14}\right]$

V Goniometrické výrazy, rovnice a nerovnici

1. Zjistěte, kdy platí nerovnice:

a) $\mathrm{tg}x\geq -1$ $\left[x\in<-\frac{\pi}{4}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi),k \text{ celé}\right]$

b) $\sin y<-0.5$ $\left[y\in\left(-\frac{7\pi}{6}+2k\pi,\frac{11\pi}{6}+2k\pi\right),k \text{ celé}\right]$

c) $\cos 4\alpha<\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\left[\varepsilon\in<-\frac{\pi}{16}+k\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{16}+k\frac{\pi}{2}),k \text{ celé}\right]$

d) $\cot g\frac{\beta}{2}<1$ $\left[\beta\in\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi,(k+1)\pi\right),k \text{ celé}\right]$

2. Dokažte, že pro úhel x platí:

a) $\frac{\cos x-\cot gx}{\cot gx}=\sin x-1$ $\left[x\neq k\frac{\pi}{2}\right]$

b) $\frac{1-\mathrm{tg}^2x}{\cos 2x}=\frac{2\mathrm{tg}x}{\sin 2x}$ $\left[x\neq k\frac{\pi}{4}\right]$

Napište podmínky pro x.

3. Zjednodušte dané výrazy a určete, kdy jsou reálné:

a) $\frac{\sin 2x}{\sin x}-\frac{\cos 2x}{\cos x}$ $\left[\frac{1}{\cos x},x\neq k\frac{\pi}{2}\right]$

b) $\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2x}+\frac{1}{1+\cot g^2x}$ $\left[1,x\neq k\frac{\pi}{2}\right]$

c) $\dfrac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}+\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$ $\left[2\mathrm{tg}\alpha, \alpha \neq k\dfrac{\pi}{2}\right]$

d) $\dfrac{1}{1+\sin\alpha}-\dfrac{1}{1-\sin\alpha}-\dfrac{2}{\cos^2\alpha}$ $\left[\dfrac{2}{\sin\alpha-1}, \alpha \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right]$

4. Řešte rovnice:

a) $\mathrm{tg}x = 3\cot gx$ $\left[x \neq \pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi\right]$

b) $\sin 2x = \sin x$ $\left[x = k\pi, x \neq \pm\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\right]$

c) $\sin^2 x - \cos^2 x + \sin x = 0$ $[x = 30° + k360°, 150° + k360°, 270° + k360°]$

d) $2\mathrm{tg}x - 3\cot gx = 1$ $[x = 56°19' +\ddot{}k180°, 135° + k180°]$

e) $\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x \cdot \cos x = 0$ $[x = k180°, 60° + k180°]$

f) $\sin\dfrac{x}{2} + \cos x = 1$ $[x = k360°, 60° + k720°, 300° + k720°]$

g) $\sin^2 x - 7\sin x \cdot \cos x + 6\cos^2 x = 0$ $[x = 80°32' + k180°, 45° + k180°]$

VI Analytická geometrie

1. V trojúhelníku ABC (A[4;-2], B[2;6], C[-2;0]) najděte rovnici těžiště z bodu C.
$[2x - 5y + 4 = 0]$

2. jaké úseky tvoří na osách souřadnic přímka jdoucí body A[1;4,5]; B[-4,-3].
$[p = -2, q = 3]$

3. Určete rovnici přímky jdoucí bodem A[6,5]; která na osách vymezuje úseky,

jejichž součet je 22.
$[x + y - 11 = 0, 5x + 6z - 60 - 0]$

4. Určete pro které hodnoty parametru <u>a</u> přímka
$(a+2)x + (a^2-9)z + 3a^2 - 8a + 5 = 0$

a) je rovnoběžná s osou x,

b) je rovnoběžná s osou y,

c) prochází počátkem.

Napište rovnici těchto přímek.

[a) $-5y + 33 = 0$ b) $x - 56 = 0; 5x + 8 = 0$ c) $33x - 56y = 0;\ 3x - 8y = 0$]

5. Jaká je rovnice přímky jdoucí bodem A a svírající s osou x úhel φ v případech:

a) A [6,4] $\varphi = 60^\circ$ [$x\sqrt{3} - z + 4 - 6\sqrt{3} = 0$]

b) A [4,–3] $\varphi = 135^\circ$ [$x + y - 1 = 0$]

c) A [0,–2] $\varphi = 150^\circ$ [$x\sqrt{3} + 3y + 6 = 0$]

6. Jaká je rovnice přímky, která prochází průsečíkem přímek $x - 5y + 1 = 0$, $2x + 3y + 4 = 0$ a je rovnoběžná s přímkou $y = 2x$. [$26x - 13y + 44 = 0$]

7. Jakou vzdálenost má bod M [5;7] od přímky určené body A [-4, 5] a B [11, -3]

[d=6]